

L'Informatique par le calcul formel

Rémi Legrand
LIRMM --- Université Montpellier 2

Annick Valibouze
LIP6 --- ISUP & Université Paris 6

Expérimentation :
Réalisation d'un livre interactif de
calcul formel

Calcul formel

- Le calcul formel est l'**étude** et la mise en place des moyens pour manipuler des expressions algébriques sans perte de précision, afin d'obtenir des résultats non approchés

Sous quelle forme ?

$$p := x^8 + x^5 - x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 6x - 7 :$$

factor(p);

$$(x - 1) (x^2 + 1) (x^5 + x^4 + x^2 + x + 7)$$

Exemples de calculs

Outil pour l'ingénieur

$\text{int}(x^2 \cdot \sin(ax) + b, x);$

$$\frac{-a^2 x^2 \cos(ax) + 2 \cos(ax) + 2 a x \sin(ax)}{a^3} + b x$$

$\text{taylor}(1 / \cos(x), x = 0, 7);$

$$1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \frac{61}{720} x^6 + O(x^7)$$

Exemples de calculs

Qu'est-ce que résoudre ?

\square `solve(x2 + x + 1);`

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} I \sqrt{3}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} I \sqrt{3}$$

`e := solve(x5 + x3 + 1, x)`

`{RootOf(_Z5 + _Z3 + 1, index = 4), RootOf(_Z5 + _Z3 + 1, index = 2), RootOf(_Z5 + _Z3 + 1, index = 5), RootOf(_Z5 + _Z3 + 1, index = 1), RootOf(_Z5 + _Z3 + 1, index = 3)}`

Exemples de calculs

Qu'est-ce que résoudre ?

```
evalf(e);  
{ -0.2178532194 + 1.166951246 I, -0.2178532194  
  - 1.166951246 I, 0.6366631068 + 0.6647015651 I,  
  0.6366631068 - 0.6647015651 I, -0.8376197748 }  
subs(x = - 0.8376197748,  $x^5 + x^3 + 1$ )  
1. 10-10  
evala(subs(x = RootOf( $\_Z^5 + \_Z^3 + 1$ ),  $x^5 + x^3 + 1$ ))  
0
```

Exemples de calculs

Programmer

```
pgcd := proc(a, b, x)  
  if (b = 0) then return primpart(a)  
  else print(b); return pgcd(b, rem(a, b, x), x);  
end if; end proc;
```

```
pgcd(( $x^2 - 1$ ) · ( $x^9 + 7$ ), ( $x^2 - 1$ ) · ( $x^7 + 3$ ), x);
```

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1)(x^7 + 3) \\ & -7 + 10x^2 - 3x^4 \\ & -3 + 3x^2 + \frac{343}{27}x^3 - \frac{343}{27}x \\ & - \frac{803860}{117649} + \frac{803860}{117649}x^2 \\ & x^2 - 1 \end{aligned}$$

Positionnement du calcul formel

- Pluralité difficile à gérer
 - Outil pour les scientifiques vs. Informatique
 - Double culture mathématique et informatique
 - Beaucoup d'applications dans les sciences exactes
- Le calcul formel est de l'informatique appliquée à des données issues des sciences
- Le calcul formel est une discipline en soi, indépendamment de ses applications
- Le calcul formel doit s'enseigner pour lui-même

Calcul formel : de l'informatique

- Concepts fondamentaux de l'informatique
 - Algorithmique, complexité
 - Programmation, récursivité
 - Structures de données (formes normales)
- L'utilisateur du Calcul formel a besoin d'une **connaissance profonde** de ces concepts qui ne doivent pas être occultés au profit des concepts sous-jacents de l'application
- Englobe l'essentiel des concepts utiles pour l'ingénieur

Manipulation d'objets et outils mathématiques

- Outils
 - pgcd, Résultant, Résolvante, Polynôme caractéristique
- Techniques de calcul
 - Interpolation
 - Calcul modulaire, calcul p-adique, calcul matriciel
 - Calcul numérique « à résultat exact »
- Objets : polynômes, Matrices, ...
- Nécessité parfois d'une mise à niveau en mathématiques et de compléments mais ce n'est pas le coeur de l'activité

Expérimentation

- Livre interactif de calcul formel (Science active)
 - Disposer de nombreux **liens** vers des « rappels » mathématiques (pas de nombre de pages limité)
 - Dérouler les algorithmes pour les maîtriser
- Langage Maple pour les notations et exercices
- Support technique : Système Maple 11
- Interactivité
 - L'étudiant peut tester ses propres exemples
 - Exercices exécutables dans le contexte du livre

Conclusion

- Pas de guerre de frontières entre les domaines
- Le calcul formel est **le meilleur vecteur pour enseigner l'informatique** aux étudiants
 - Ce n'est pas de l'informatique allégée, i.e. une sous informatique, réservée à ceux qui ne l'aiment pas trop (enseignants et étudiants).
 - Nombreuses applications
 - Informatique moins dévoreuse de temps
- Nécessité de formateurs polyvalents